

Résolution Équation de Laplace 2D

Méthode analytique

S. Chevalier – Document débuté le 29 Décembre 2013

1 Équation de Laplace

Sur le domaine Ω , l'équation de Laplace par rapport à u s'écrit :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1)$$

Les conditions aux limites sont indiquées sur la Figure ci-dessous :

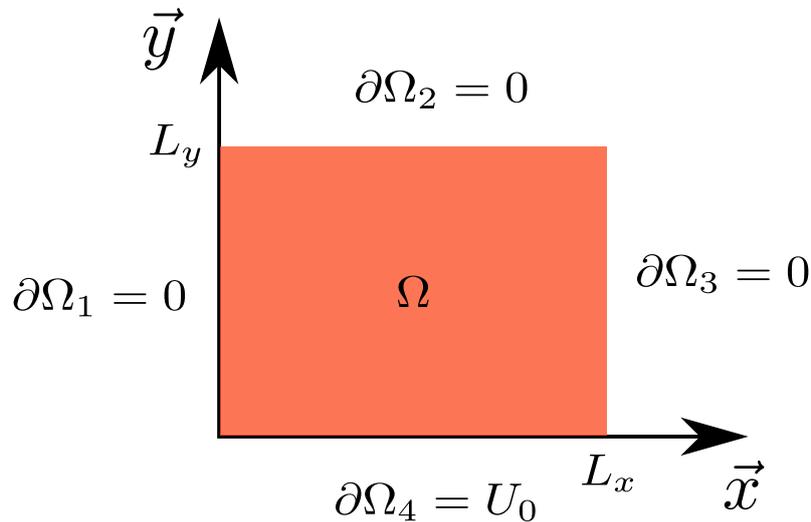


FIGURE 1 – Géométrie du problème de Laplace 2D.

Nous cherchons maintenant une solution analytique à l'équation 1.1.

1.1 Solution avec une condition de Dirichlet constante

La méthode proposée ici repose sur la séparation des variables x et y . Nous supposons une solution u de la forme suivante :

$$u(x, y) = X(x).Y(y) \quad (1.2)$$

En injectant l'équation 1.2 dans l'équation 1.1, nous obtenons l'égalité suivante :

$$X''(x).Y(y) = -Y''(y).X(x) = \pm\lambda^2 \quad (1.3)$$

Dés lors, trois choix s'offrent à nous :

1. $\lambda^2 = 0$
2. $\lambda^2 < 0$
3. $\lambda^2 > 0$

Le choix d'un λ^2 positif menant à la solution triviale $u(x, y) = 0$. Il ne reste alors ces deux autres solutions possibles :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \quad (1.4)$$

$$X''(x) = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{-Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2 \quad (1.6)$$

$$Y''(y) = 0 \quad (1.7)$$

Les solutions suivantes sont ensuite obtenues :

$$X(x) = A \cdot \sin(\lambda \cdot x) + B \cdot \cos(\lambda \cdot x) \quad (1.8)$$

$$X_0(x) = A_0 \cdot x + B_0 \quad (1.9)$$

$$Y(y) = C \cdot \sinh(\lambda \cdot y) + D \cdot \cosh(\lambda \cdot y) \quad (1.10)$$

$$Y(y) = C_0 \cdot y + D_0 \quad (1.11)$$

Dès lors la solution générale $u(x, y)$ s'écrit :

$$u(x, y) = X_0(x) \cdot Y_0(y) + X(x) \cdot Y(y) \quad (1.12)$$

Les huit coefficients ci-dessus sont déterminés par les conditions aux limites. Intéressons-nous tout d'abord aux conditions sur x :

$$X(x=0) = 0 = B \quad (1.13)$$

$$X_0(x=0) = 0 = B_0 \quad (1.14)$$

Puis en $x = L_x$:

$$X(x = L_x) = A \cdot \sin(\lambda \cdot L_x) = 0 \quad (1.15)$$

$$X_0(x = L_x) = A_0 \cdot L_x = 0 \quad (1.16)$$

Nous obtenons donc $A_0 = 0$, ce qui conduit à $X_0(0) = 0$. La solution exprimée par l'équation 1.12 se réduit finalement à l'équation 1.2. En revanche, cette conclusion ne sera pas vérifiée avec des conditions type Neumann, c.f. section 2.

Poursuivons, pour éviter la solution triviale $A = 0$, la seule autre possibilité est de supposer : $\sin(\lambda \cdot L_x) = 0$, ce qui est vérifié pour :

$$\lambda_n = \frac{n \cdot \pi}{L_x} \quad (1.17)$$

Nous procédons de la même manière avec la distribution $Y(y)$. Tout d'abord en $y = L_y$, nous avons :

$$Y(y = L_y) = C \cdot \sinh(\lambda_n \cdot L_y) + D \cdot \cosh(\lambda_n \cdot L_y) = 0 \quad (1.18)$$

D'où :

$$D = -C \cdot \tanh(\lambda_n \cdot L_y) \quad (1.19)$$

A ce stade de la résolution, nous avons la solution suivante :

$$u_n(x, y) = A \cdot \sin(\lambda_n \cdot x) \cdot C \cdot [\sinh(\lambda_n \cdot y) - \cosh(\lambda_n \cdot y) \cdot \tanh(\lambda_n \cdot L_y)] \quad (1.20)$$

Où u_n est l'une des solutions à l'équation de Laplace. Or d'après le principe de superposition, toute combinaison linéaire de la solution u_n est elle aussi solution de l'équation. Il advient donc de les prendre toutes en compte sous la forme d'une série, i.e. :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cdot \sin(\lambda_n \cdot x) \cdot [\sinh(\lambda_n \cdot y) - \cosh(\lambda_n \cdot y) \cdot \tanh(\lambda_n \cdot L_y)] \quad (1.21)$$

Le coefficient K_n est à déterminer via la dernière condition à la limite :

$$u(x, y=0) = f(x) \quad (1.22)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cdot \sin(\lambda_n \cdot x) \cdot \tanh(\lambda_n \cdot L_y) \quad (1.23)$$

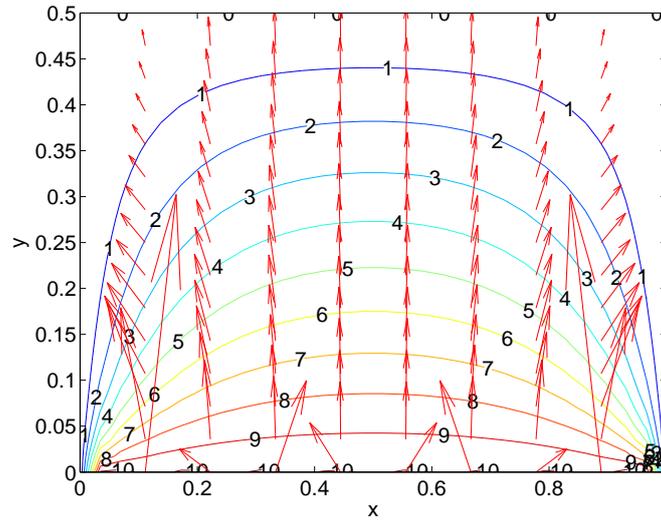


FIGURE 2 – Solution de l'équation de Laplace 2D sur une géométrie rectangle.

En posant $K'_n = K_n \cdot \tanh(\lambda_n \cdot L_y)$, nous obtenons :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} K'_n \cdot \sin(\lambda_n \cdot x) \quad (1.24)$$

Qui n'est autre que la décomposition en série de Fourier de la fonction $f(x)$. Le coefficient K'_n s'obtient de manière classique (coefficients B_n dans les séries de Fourier). Nous considérons ici $f(x) = U_0$:

$$K'_n = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L_x} \cdot x\right) \cdot dx \quad (1.25)$$

$$= \frac{2 \cdot U_0}{n \cdot \pi} \left[\cos\left(\frac{n \cdot \pi}{L_x} \cdot x\right) \right]_0^{L_x} \quad (1.26)$$

$$= \frac{2 \cdot U_0}{n \cdot \pi} (\cos(n \cdot \pi) - 1) \quad (1.27)$$

$$= \frac{2 \cdot U_0}{n \cdot \pi} ((-1)^n - 1) \quad (1.28)$$

Finalement, nous obtenons $K_n = \frac{2 \cdot U_0 \cdot ((-1)^n - 1)}{n \cdot \pi \cdot \tanh(\lambda_n \cdot L_y)}$ ce qui permet d'expliciter la solution à l'équation 1.1 sous la forme suivante :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot U_0 \cdot ((-1)^n - 1)}{n \cdot \pi \cdot \tanh(\lambda_n \cdot L_y)} \cdot \sin(\lambda_n \cdot x) \cdot [\sinh(\lambda_n \cdot y) - \cosh(\lambda_n \cdot y) \cdot \tanh(\lambda_n \cdot L_y)] \quad (1.29)$$

Avec $\lambda_n = \frac{n \cdot \pi}{L_x}$.

Les flux se déduisent enfin comme suit :

$$\Phi_x = -\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot U_0 \cdot ((-1)^n - 1)}{L_x \cdot \tanh(\lambda_n \cdot L_y)} \cdot \cos(\lambda_n \cdot x) \cdot [\sinh(\lambda_n \cdot y) - \cosh(\lambda_n \cdot y) \cdot \tanh(\lambda_n \cdot L_y)] \quad (1.30)$$

$$\Phi_y = -\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot U_0 \cdot ((-1)^n - 1)}{L_x \cdot \tanh(\lambda_n \cdot L_y)} \cdot \sin(\lambda_n \cdot x) \cdot [\cosh(\lambda_n \cdot y) - \sinh(\lambda_n \cdot y) \cdot \tanh(\lambda_n \cdot L_y)] \quad (1.31)$$

La fonction $u(x, y)$ est tracée Figure 2. Les lignes indiquent les isovalues, pour $U_0 = 10$ et les vecteurs les flux calculés précédemment.

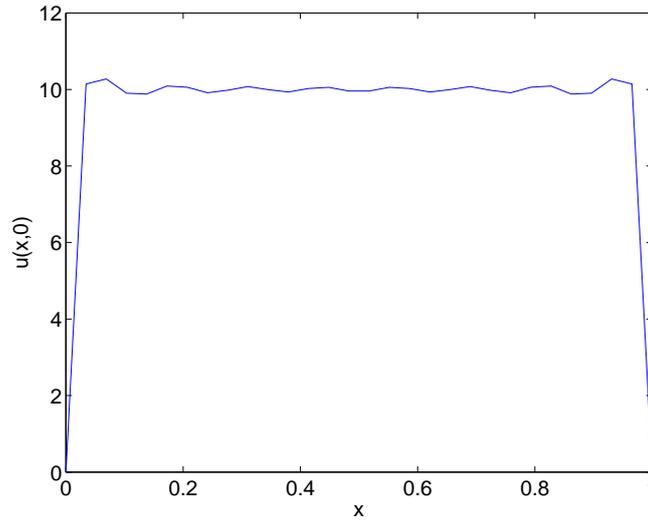


FIGURE 3 – Solution $u(x, 0)$ tracée sur la frontière $\partial\Omega_4$.

La discontinuité de condition aux limite en $x = 0$ et $x = L_x$ induit des oscillations de la solution au niveau de la frontière $\partial\Omega_4$, voir Figure 3. L'utilisation de ce type de conditions aux limites n'est pas une si bonne idée. Néanmoins, ce défaut peut être contourné en prenant une condition à la limite $f(x)$ qui respecte les bornes à 0 en $x = 0$ et $x = L_x$ sans discontinuité.

1.2 Solution avec une condition au limite de Dirichlet type polynôme

Considérons alors la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{4.U_0}{L_x} \cdot \left(x - \frac{x}{L_x}\right) \quad (1.32)$$

Elle est nulle en 0 et L_x et maximale pour $L_x/2$. Elle est tracée Figure 5. Tout le processus de résolution est identique, seul le calcul du coefficient K'_n diffère. Il devient alors :

$$K'_n = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} \frac{4.U_0}{L_x} \cdot \left(x - \frac{x}{L_x}\right) \cdot \sin(\lambda_n \cdot x) \cdot dx \quad (1.33)$$

$$= \frac{8.U_0}{L_x^2} \left(\int_0^{L_x} x \cdot \sin(\lambda_n \cdot x) \cdot dx - \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} x^2 \cdot \sin(\lambda_n \cdot x) \cdot dx \right) \quad (1.34)$$

Les deux intégrales se calculent par intégration par partie. On obtient pour la première :

$$\int_0^{L_x} x \cdot \sin(\lambda_n \cdot x) \cdot dx = - \left[x \cdot \frac{\cos(\lambda_n \cdot x)}{\lambda_n} \right]_0^{L_x} + \int_0^{L_x} \frac{\cos(\lambda_n \cdot x)}{\lambda_n} \cdot dx \quad (1.35)$$

$$= -L_x^2 \frac{\cos(n \cdot \pi)}{n \cdot \pi} \quad (1.36)$$

La seconde, après une double intégration par partie :

$$\int_0^{L_x} x^2 \cdot \sin(\lambda_n \cdot x) \cdot dx = - \left[x^2 \cdot \frac{\cos(\lambda_n \cdot x)}{\lambda_n} \right]_0^{L_x} + 2 \left[\left[x \cdot \frac{\sin(\lambda_n \cdot x)}{\lambda_n^2} \right]_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \frac{\sin(\lambda_n \cdot x)}{\lambda_n^2} \cdot dx \right] \quad (1.37)$$

$$= -L_x^3 \frac{\cos(n \cdot \pi)}{n \cdot \pi} - 2L_x^3 \frac{1 - \cos(n \cdot \pi)}{n^3 \cdot \pi^3} \quad (1.38)$$

D'où, après simplification des différents termes, nous obtenons le coefficient K'_n suivant :

$$K'_n = \frac{16.U_0}{n^3 \cdot \pi^3} (1 - (-1)^n) \quad (1.39)$$

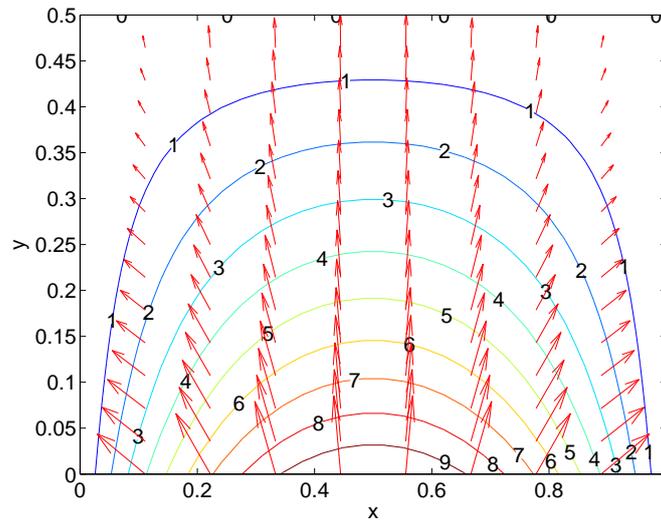


FIGURE 4 – Solution de l'équation de Laplace 2D sur une géométrie rectangle.

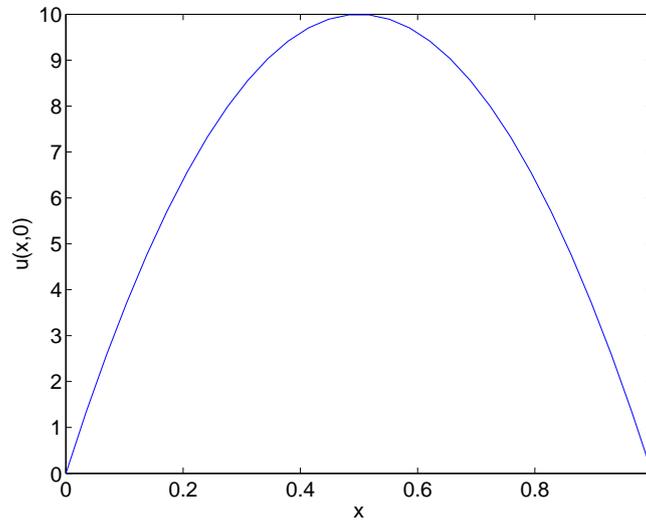


FIGURE 5 – Solution $u(x, 0)$ tracée sur la frontière $\partial\Omega_4$.

La solution u devient :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 \cdot U_0 \cdot ((-1)^n - 1)}{n^3 \cdot \pi^3 \cdot \tanh(\lambda_n \cdot L_y)} \cdot \sin(\lambda_n \cdot x) \cdot [\sinh(\lambda_n \cdot y) - \cosh(\lambda_n \cdot y) \cdot \tanh(\lambda_n \cdot L_y)] \quad (1.40)$$

Les résultats sont tracés sur les Figures 4 et 5 pour $U_0 = 10$ et comme nous pouvons le constater, il n'y a plus d'oscillations de la solution sur la frontière $\partial\Omega_4$. Les calculs des flux montrent également un meilleur comportement de ceux-ci sur cette même frontière.

Principe de superposition (source Wikipedia®, article Équation différentielle linéaire)

L'équation différentielle homogène E_0 est :

$$a_n \cdot z^{(n)} + \dots + a_2 \cdot z'' + a_1 \cdot z' + a_0 \cdot z = 0$$

Toute combinaison linéaire de solutions, sur un sous-intervalle J de I , de l'équation homogène E_0 , est elle aussi solution : l'espace S_0 de ces solutions est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions définies sur J .

Étant donnée une solution y de E_b sur J , les autres sont les fonctions de la forme $y + z$ avec z solution arbitraire de E_0 sur J : l'espace S_b de ces solutions est un espace affine de direction S_0 .

2 Résolution de l'équation de Laplace avec des conditions de Neumann

On utilise la même géométrie :

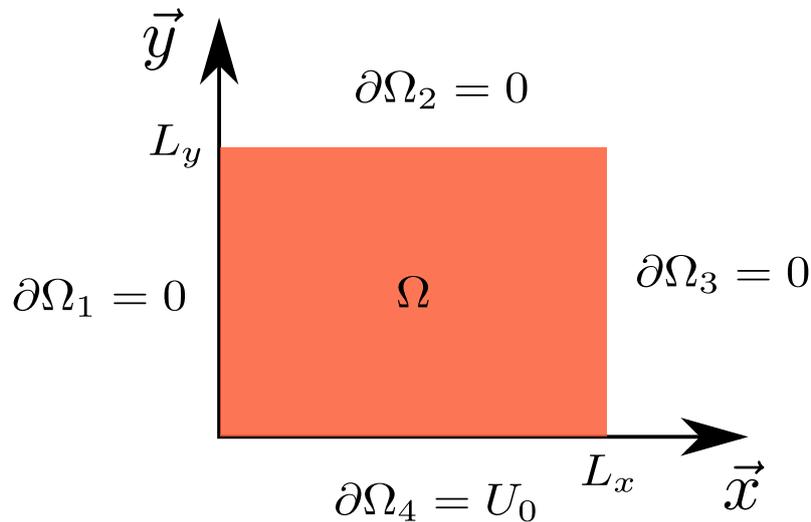


FIGURE 6 – Géométrie du problème de Laplace 2D.

L'équation est toujours celle de Laplace :

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad (2.1)$$

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_4 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2 \quad (2.3)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = f(y) \text{ sur } \partial\Omega_1 \quad (2.4)$$

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_3 \quad (2.5)$$

On utilise le principe de séparation des variables. Celui-ci peut s'appliquer car nous disposons de conditions aux limites homogènes symétriques sur au moins une variable. Nous avons :

$$u(x, y) = X_0(x) \cdot Y_0(y) + X(x) \cdot Y(y) \quad (2.6)$$

Tout d'abord concernant les distributions $Y_0(y)$ et $Y(y)$, nous avons les solutions suivantes en considérant $\lambda \leq 0$ comme précédemment :

$$Y_0(y) = A_0 + B_0 \cdot y \quad (2.7)$$

$$Y(y) = A \cdot \sin(\lambda \cdot y) + B \cdot \cos(\lambda \cdot y) \quad (2.8)$$

– En $y = 0$, nous obtenons $B_0 = 0$ et $A = 0$

– En $y = L_y$, nous obtenons $\lambda_n = \frac{n.\pi}{L_y}$ car $B \neq 0$ pour éviter la solution triviale $u(x, y) = 0$

Ce qui conduit aux distributions suivantes :

$$Y_0 = A_0 \quad (2.9)$$

$$Y(y) = B_n \cdot \cos(\lambda_n \cdot y) \quad (2.10)$$

Ensuite, nous nous concentrons sur les distributions $X_0(x)$ et $X(x)$, nous avons les solutions suivantes en considérant toujours $\lambda \leq 0$:

$$X_0(x) = C_0 + D_0 \cdot x \quad (2.11)$$

$$X(x) = C_n \cdot \sinh(\lambda_n \cdot x) + D_n \cdot \cosh(\lambda_n \cdot x) \quad (2.12)$$

En $x = L_x$, nous avons $X_0(L_x) = 0$ et $X(L_x) = 0$, soit $D_0 = -C_0 \cdot L_x$ et $D = -C_n \cdot \tanh(\lambda_n \cdot L_x)$. Après combinaison des différents coefficients et superposition des solutions mode par mode nous obtenons :

$$u(x, y) = K_0 \cdot (x - L_x) + \sum_{n=0}^{\infty} K_n \cdot \cos(\lambda_n \cdot y) \cdot (\sinh(\lambda_n \cdot x) - \cosh(\lambda_n \cdot x) \cdot \tanh(\lambda_n \cdot L_x)) \quad (2.13)$$

Avec $K_0 = A_0 \cdot D_0$ et $K_n = B_n \cdot D_n$.

Il ne reste plus qu'à déterminer ces deux coefficients à partir de la dernière condition à la limite $f(y)$. Celle-ci est prise égale à un flux Φ_0 entre 0 et $L_y/2$ et nulle sur le reste de la frontière $\partial\Omega_1$. Celle-ci est représenté sur la Figure 8. Nous obtenons :

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = K_0 \cdot L_x + \sum_{n=0}^{\infty} -K_n \cdot \lambda_n \cdot \cos(\lambda_n \cdot y) = f(y) \quad (2.14)$$

$$= K'_0 + \sum_{n=0}^{\infty} K'_n \cdot \cos(\lambda_n \cdot y) \quad (2.15)$$

Ce qui correspond à la décomposition en série de Fourier de la fonction $f(y)$. Le calcul des coefficients K'_0 et K'_n s'effectue comme suit :

$$K'_0 = \frac{1}{L_y} \cdot \int_0^{L_y/2} I_0 \cdot dy \quad (2.16)$$

$$= \frac{I_0}{2} \quad (2.17)$$

D'où $K_0 = \frac{I_0}{2 \cdot L_x}$

$$K'_n = \frac{2}{L_y} \cdot \int_0^{L_y/2} I_0 \cdot \cos(\lambda_n \cdot y) \cdot dy \quad (2.18)$$

$$= \frac{2 \cdot I_0}{n \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \quad (2.19)$$

D'où $K_n = -\frac{2 \cdot I_0 \cdot L_y}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right)$ Nous pouvons finalement écrire la solution $u(x, y)$ à notre problème telle que :

$$u(x, y) = \frac{I_0 \cdot (x - L_x)}{2 \cdot L_x} + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2 \cdot I_0 \cdot L_y}{n^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \cdot \cos(\lambda_n \cdot y) \cdot (\sinh(\lambda_n \cdot x) - \cosh(\lambda_n \cdot x) \cdot \tanh(\lambda_n \cdot L_x)) \quad (2.20)$$

Cette solution est présentée sur la Figure 7 pour une valeur $I_0 = 20$. Ceci conclue l'étude de l'équation de Laplace 2D avec une condition de type Neumann.

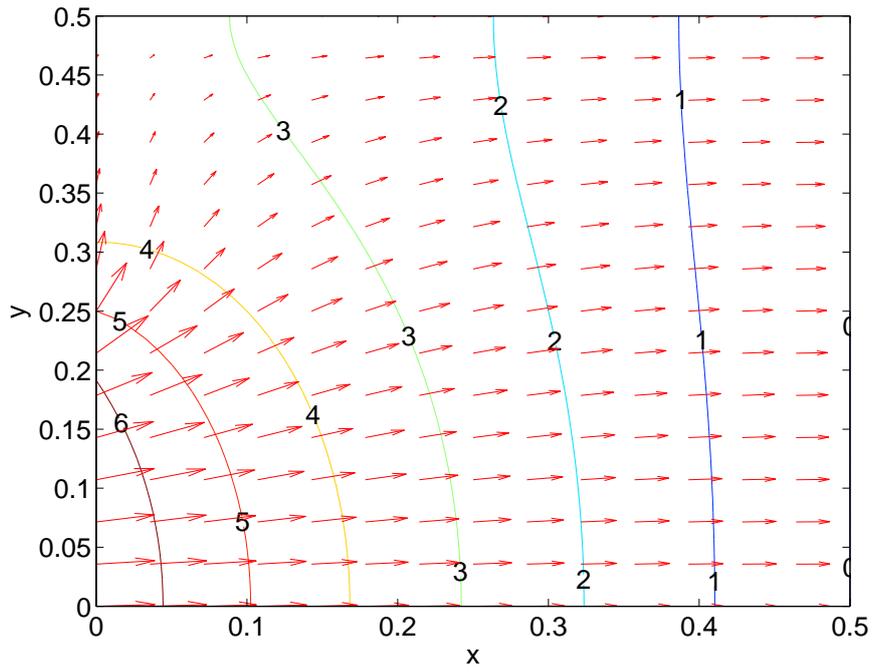


FIGURE 7 – Solution de l'équation de Laplace 2D avec conditions de Neumann

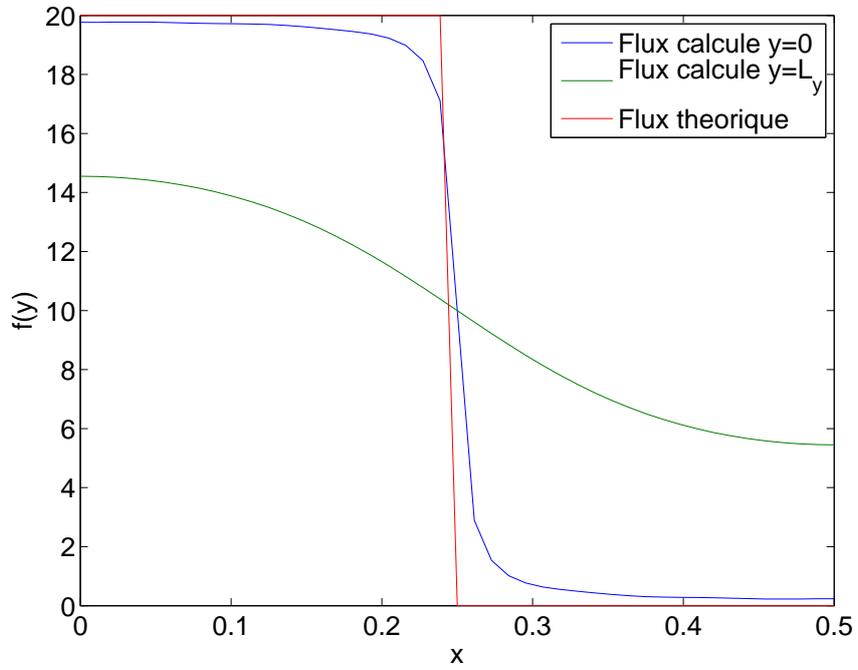


FIGURE 8 – Flux théorique et calculés en $y = 0$ et $y = L_y$.

3 Annexes : décomposition en série de Fourier

3.1 Généralités

La décomposition d'une fonction $f(t)$ est série de Fourier $F(t)$ s'écrit de la manière suivante :

$$F(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + B_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)] \quad (3.1)$$

Avec $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$.

Le calcul des coefficients est le suivant :

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (3.2)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) dt \quad (3.3)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) dt \quad (3.4)$$

Selon les fonctions, certaines simplifications dans le calcul des coefficients peuvent intervenir :

- si la fonction $f(t)$ est paire alors $B_n = 0$
- si la fonction $f(t)$ est impaire alors $A_n = 0$

Le plus important est de bien définir la période, ensuite la série de Fourier obtenue est nécessairement périodique sur T .

3.2 Fonction rectangle impaire

Cette fonction est définie comme suit :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -\tau \\ -p & \text{si } -\tau \leq t \leq 0 \\ p & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{si } t > \tau \end{cases} \quad (3.5)$$

La Figure 9 présente un tracé de cette fonction.

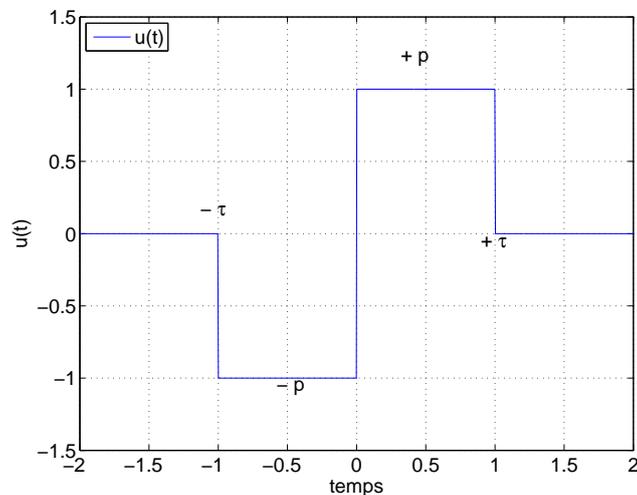


FIGURE 9 – Tracé de la fonction $u(t)$.

La fonction est périodique sur $4.\tau$ La décomposition en série de Fourier u_F est la suivante :

$$u_F(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cdot \cos\left(\frac{n.\pi}{2.\tau}.t\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{n.\pi}{2.\tau}.t\right) \right] \quad (3.6)$$

Le calcul des coefficients s'écrit comme suit :

$$A_0 = \frac{1}{4.\tau} \int_{-2\tau}^{2\tau} u(t).dt = 0 \quad (3.7)$$

La fonction u_t étant symétrique, le coefficient A_0 est nul.

$$A_n = \frac{2}{4.\tau} \int_{-2\tau}^{2\tau} u(t) \cdot \cos\left(\frac{n.\pi}{2.\tau}.t\right) .dt \quad (3.8)$$

D'après la définition de l'équation $u(t)$ donnée par les relations 3.5, le calcul du coefficient A_n se réduit à :

$$A_n = -\frac{1}{2.\tau} \int_{-\tau}^0 p \cdot \cos\left(\frac{n.\pi}{2.\tau}.t\right) .dt + \frac{1}{2.\tau} \int_0^{\tau} p \cdot \cos\left(\frac{n.\pi}{2.\tau}.t\right) .dt \quad (3.9)$$

$$= \frac{p}{n.\pi} \left[-\left[\sin\left(\frac{n.\pi}{2.\tau}.t\right) \right]_{-\tau}^0 + \left[\sin\left(\frac{n.\pi}{2.\tau}.t\right) \right]_0^{\tau} \right] \quad (3.10)$$

$$= \frac{p}{n.\pi} \left[\sin\left(-\frac{n.\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{n.\pi}{2}\right) \right] \quad (3.11)$$

$$= 0 \quad (3.12)$$

Car $\sin(-x) = -\sin(x)$. Ceci est une bonne illustration de l'hypothèse $A_n = 0$ lorsque la fonction u_t est impaire. Il ne reste plus qu'à déterminer les coefficients B_n :

$$B_n = \frac{2}{4.\tau} \int_{-2\tau}^{2\tau} u(t) \cdot \sin\left(\frac{n.\pi}{2.\tau}.t\right) .dt \quad (3.13)$$

D'après la définition de l'équation $u(t)$ donnée par les relations 3.5, le calcul du coefficient B_n se réduit à :

$$B_n = -\frac{1}{2.\tau} \int_{-\tau}^0 p \cdot \sin\left(\frac{n.\pi}{2.\tau}.t\right) .dt + \frac{1}{2.\tau} \int_0^{\tau} p \cdot \sin\left(\frac{n.\pi}{2.\tau}.t\right) .dt \quad (3.14)$$

$$= \frac{p}{n.\pi} \left[-\left[\cos\left(\frac{n.\pi}{2.\tau}.t\right) \right]_{-\tau}^0 + \left[\cos\left(\frac{n.\pi}{2.\tau}.t\right) \right]_0^{\tau} \right] \quad (3.15)$$

$$= \frac{p}{n.\pi} \left[-\left(-1 + \cos\left(-\frac{n.\pi}{2}\right)\right) + \left(-\cos\left(\frac{n.\pi}{2}\right) + 1\right) \right] \quad (3.16)$$

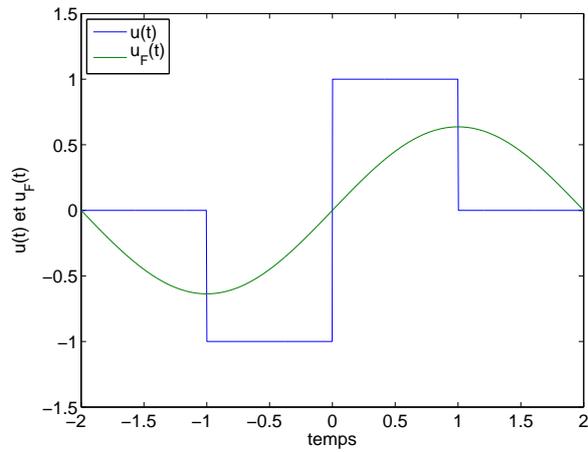
$$= \frac{2.p}{n.\pi} \left(1 - \cos\left(\frac{n.\pi}{2}\right)\right) \quad (3.17)$$

Avec $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\int \sin(u).du = -\frac{\cos(u)}{u} + Cte$.

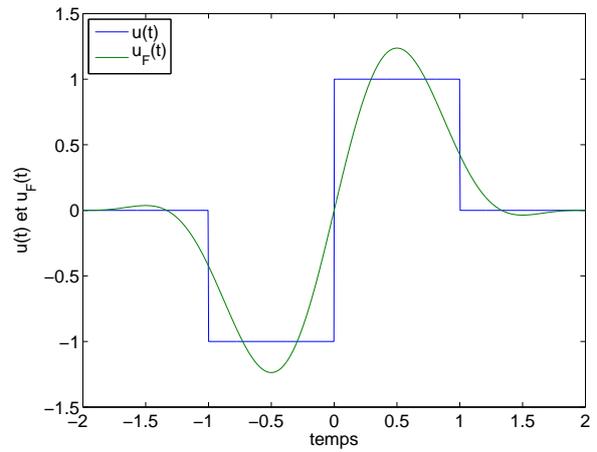
Finalement, la décomposition en série de Fourier $u_F(t)$ de la fonction $u(t)$ s'écrit de la manière suivante :

$$u_F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.p}{n.\pi} \left(1 - \cos\left(\frac{n.\pi}{2}\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{n.\pi}{2.\tau}.t\right) \quad (3.18)$$

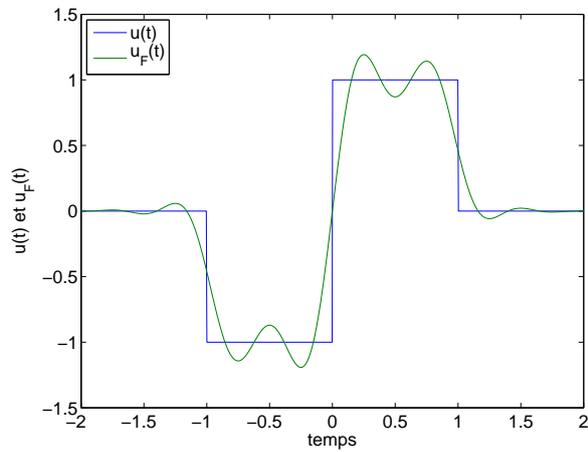
Les Figures 10(a) à 10(e) présentent une comparaison entre la fonction rectangle et sa décomposition en série de Fourier. La différence entre les 4 figures repose sur le nombre de mode n utilisé.



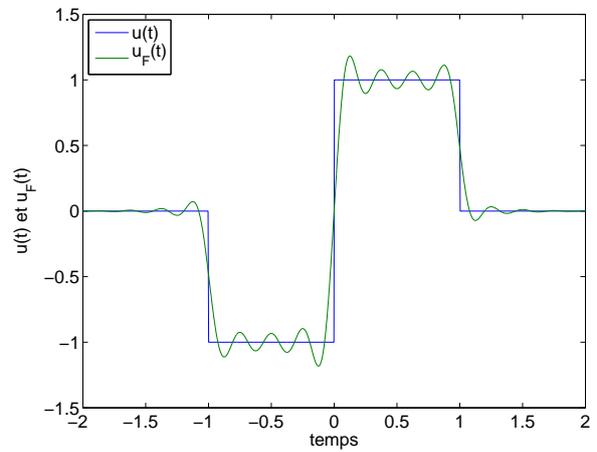
(a) $n = 1$



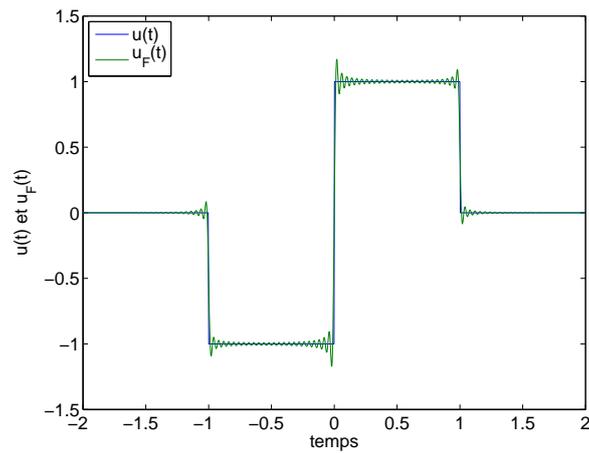
(b) $n = 3$



(c) $n = 7$



(d) $n = 15$



(e) $n = 100$

FIGURE 10 – Comparaison entre la fonction $u(t)$ et sa décomposition en série de Fourier pour un nombre n différents de mode.

3.3 Fonction rectangle quelconque

Dans ce deuxième exemple, les calculs étant très similaires au premier, ils seront donc moins détaillés.

$$u(t) = \begin{cases} p & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{si } \tau \leq t \leq 2\tau \end{cases} \quad (3.19)$$

La période de cette fonction est donc 2τ , comme représenté ci-dessous.

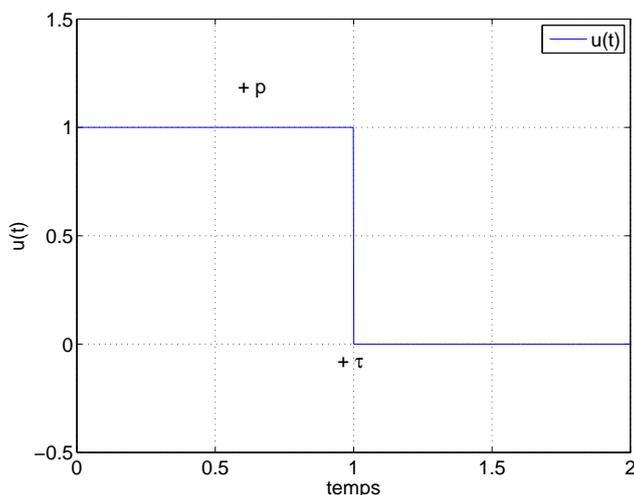


FIGURE 11 – Tracé de la fonction $u(t)$.

La décomposition en série de Fourier $u_F(t)$ s'écrit :

$$u_F(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{\tau} \cdot t\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{\tau} \cdot t\right) \right] \quad (3.20)$$

Ici, aucune simplification n'est possible, tous les coefficients sont non nuls. Le coefficient A_0 se calcule :

$$A_0 = \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} u(t) \cdot dt \quad (3.21)$$

$$= \frac{p}{2 \cdot \tau} \cdot [t]_0^\tau \quad (3.22)$$

$$= \frac{p}{2} \quad (3.23)$$

Le coefficient A_n se calcule :

$$A_n = \frac{1}{\tau} \int_0^{2\tau} u(t) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{\tau} \cdot t\right) dt \quad (3.24)$$

$$= \frac{p}{n \cdot \pi} \cdot \left[\sin\left(\frac{n \cdot \pi}{\tau} \cdot t\right) \right]_0^\tau \quad (3.25)$$

$$= \frac{p}{n \cdot \pi} \sin(n \cdot \pi) \quad (3.26)$$

Le coefficient B_n se calcule :

$$B_n = \frac{1}{\tau} \int_0^{2\tau} u(t) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{\tau} \cdot t\right) dt \quad (3.27)$$

$$= -\frac{p}{n \cdot \pi} \cdot \left[\cos\left(\frac{n \cdot \pi}{\tau} \cdot t\right) \right]_0^\tau \quad (3.28)$$

$$= \frac{p}{n \cdot \pi} (1 - \cos(n \cdot \pi)) \quad (3.29)$$

D'où la série de Fourier suivante :

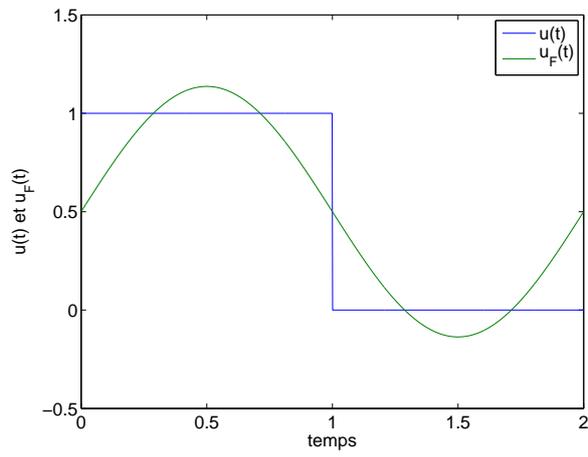
$$u_F(t) = \frac{p}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{n.\pi} \left[\sin(n.\pi) . \cos\left(\frac{n.\pi}{\tau}.t\right) + (1 - \cos(n.\pi)) . \sin\left(\frac{n.\pi}{\tau}.t\right) \right] \quad (3.30)$$

Note : l'équation 3.30 est juste, mais elle peut être simplifiée. En effet, $\sin(n.\pi)$ est nul pour tout n et $\cos(n.\pi)$ peut se simplifier en $(-1)^n$. En fait, cette fonction rectangle était elle aussi impaire...

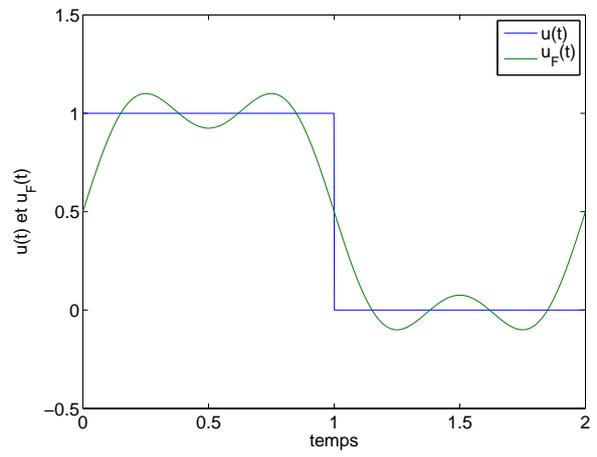
D'où la nouvelle formule :

$$u_F(t) = \frac{p}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{n.\pi} . (1 - (-1)^n) . \sin\left(\frac{n.\pi}{\tau}.t\right) \quad (3.31)$$

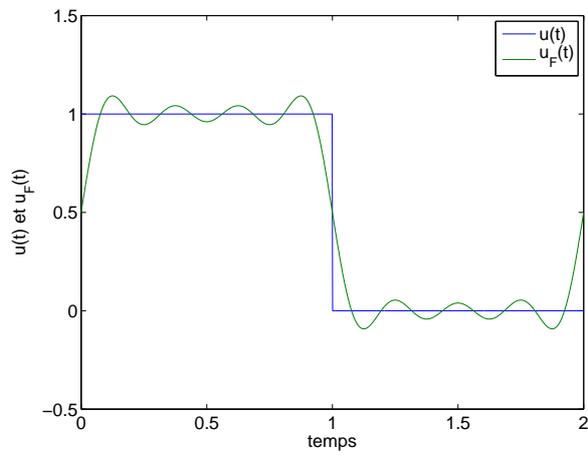
Les Figures 12(a) à 12(e) présentent la fonction $u_F(t)$ pour plusieurs modes.



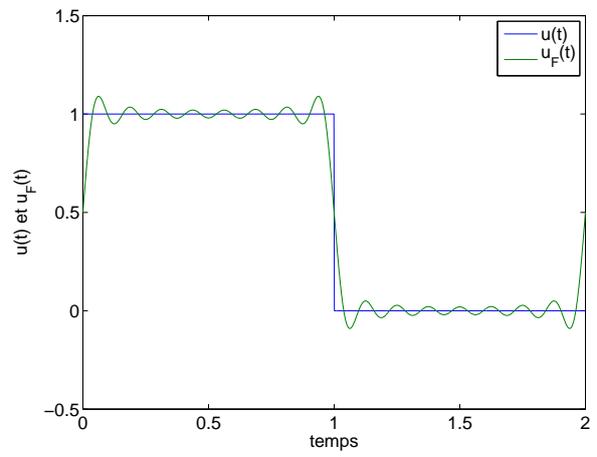
(a) $n = 1$



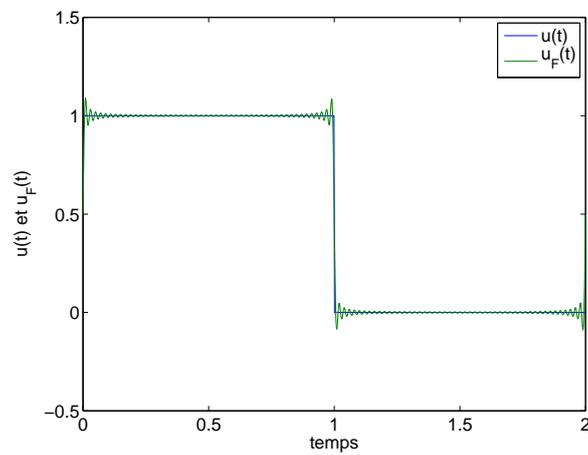
(b) $n = 3$



(c) $n = 7$



(d) $n = 15$



(e) $n = 100$

FIGURE 12 – Comparaison entre la fonction $u(t)$ et sa décomposition en série de Fourier pour un nombre n différents de mode.

3.4 Annexes

3.4.1 Code Matlab® fonction rectangle paire

```
%===== %  
% Décomposition en série de Fourier  
% d'une fonction rectangle impaire  
%  
% S. Chevalier  
% 10/02/2014  
%===== %  
  
clear all  
clc  
  
p = 1 ;  
tau = 1 ;  
t = linspace(-2,2,1000) ;  
  
%fonction porte  
u = -p*(t>=-tau).*(t<=0)+p*(t>=0).*(t<=tau) ;  
  
%décomposition en série de fourier  
n = 1 :100 ;  
for ii = 1 :length(t)  
    uf(ii) = sum(2*p./n/pi.*(1-cos(n*pi/2)).*sin(n*pi.*t(ii)/tau/2)) ;  
end  
  
figure(1)  
clf  
plot(t,u,t,uf)  
ylim([-1.5 1.5])  
xlabel('temps','fontname','helvetica','fontsize',16)  
ylabel('u(t) et u_F(t)','fontname','helvetica','fontsize',16)  
set(gca,'fontname','helvetica','fontsize',16)  
legend('u(t)', 'u_F(t)', 'location', 'northwest')  
%title(sprintf('Nombre de mode = %i',length(n)))  
  
%return  
nom = 'n100.eps' ;  
saveas(gcf,nom,'epsc')  
eps2pdf(nom)  
delete(nom)
```

3.4.2 Code Matlab® fonction rectangle quelconque

```
%===== %  
% Décomposition en série de Fourier  
% d'une fonction rectangle impaire  
%  
% S. Chevalier  
% 10/02/2014  
%===== %  
  
clear all  
clc  
  
p = 1 ;  
tau = 1 ;  
t = linspace(0,2,1000) ;  
  
%fonction porte  
u = p*(t>=0).*(t<=tau) ;  
  
%décomposition en série de fourier  
n = 1 :100 ;  
for ii = 1 :length(t)  
    uf(ii) = p/2+sum(p./n/pi.*sin(n*pi).*cos(n*pi/tau*t(ii)) +...  
        p./n/pi.*(1-cos(n*pi)).*sin(n*pi.*t(ii)/tau)) ;  
end  
  
figure(1)  
clf  
plot(t,u,t,uf)  
ylim([-0.5 1.5])  
xlabel('temps','fontname','helvetica','fontsize',16)  
ylabel('u(t) et u_F(t)','fontname','helvetica','fontsize',16)  
set(gca,'fontname','helvetica','fontsize',16)  
legend('u(t)', 'u_F(t)', 'location', 'northeast')  
%title(sprintf('Nombre de mode = %i',length(n)))  
  
%return  
nom = 'n100_2.eps' ;  
saveas(gcf,nom,'epsc')  
eps2pdf(nom)  
delete(nom)
```

